



## Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a VIII-a

**Problema 1.** Fie  $x \in \mathbb{R}$ . Numerele  $[x]$  și  $\{x\}$  sunt invers proporționale cu numerele 0,1 și respectiv 0,2 și verifică egalitatea

$$\sqrt{3} \cdot [x] + \sqrt{2}^3 \cdot \{x\} = \left[ (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{41} \right]^{7^2} \cdot \left[ (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{134} \right]^{15}.$$

Dacă  $n = \left(x - \sqrt{2}^{-2}\right)^0 + \left(x - \sqrt{2}^{-2}\right)^1 + \left(x - \sqrt{2}^{-2}\right)^2 + \dots + \left(x - \sqrt{2}^{-2}\right)^{2009}$ , atunci  $n$  este un număr natural divizibil cu 67.

(  $[x]$  și  $\{x\}$  reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real  $x$  ).

**Vasile Duma, profesor, Galați**

**Problema 2.** Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere naturale impare, atunci  $\sqrt{a^2 + b^2 + 4} \notin \mathbb{Q}$ .

**Viorica Bujor, profesor, Galați**

**Problema 3.** Fie  $a, b > 0$ . Să se demonstreze inegalitățile:

a)  $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2$ ;

b)  $2 \cdot (a^3 + 1 + a^3 \cdot b^3) \geq a^3 \cdot b + a^3 \cdot b^2 + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b + a^2 + a$ .

**Vasile Popa, profesor, Galați**

**Problema 4.** Pe planul pătratului  $ABCD$ ,  $AB = a$ , se ridică perpendiculara  $AP$ . Se consideră punctele  $M \in [BC]$ ,  $N \in [CD]$ ,  $BM = CN = \frac{a}{3}$ , iar  $AM \cap BN = \{E\}$ .

Fie punctul  $Q \in [AE]$ ,  $\frac{AQ}{QE} = \frac{1}{2}$ .

Să se determine lungimea segmentului  $[AP]$  astfel încât măsura unghiului diedru determinat de planele  $(PQD)$  și  $(ABC)$  să fie de  $60^\circ$ .

**Manuela Totolici, profesor, Galați**

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Țimp de lucru 3 ore.